

## 하프 버블정렬 그래프를 스타 그래프에 임베딩

서정현<sup>1)</sup>, 이형옥<sup>2)</sup>

### Embedding algorithm Half Bubblesort Graph in Star Graph

Jung-Hyun Seo<sup>1)</sup>, HyeongOk Lee<sup>2)</sup>

#### 요 약

상호연결망 분야에서 스타 그래프는 하이퍼큐브의 대안으로 발표되었다. 스타 그래프는  $n!$ 개의 노드를 가지며 노드 주소는  $n$ 개 자연수로 이루어진 순열로 표현된다. 스타 그래프는 노드는 첫 번째 심볼과 나머지 심볼 중 하나와 교환할 수 있다. 따라서 분지수는  $n-1$ 이다. 버블정렬 그래프는 스타 그래프 부류의 연결망으로  $n!$ 개의 노드를 가지며 노드는 이웃한 두 심볼을 교환할 수 있다. 따라서 분지수는  $n-1$ 이다. 하프 버블정렬 그래프는 버블정렬 그래프의 분지수  $n-1$ 을 절반으로 줄여 두 그래프가 같은 노드수  $n!$ 를 갖는 경우 망 비용이 약 절반인 새로운 그래프이다. 그래프가 새로 설계되면 설계된 그래프에서 실현 가능한 다양한 알고리즘 개발이 필요하다. 임베딩은 임의의 그래프를 다른 그래프에 사상하는 것이다. 그래프는 노드와 에지로 이루어져 있다. 임베딩에서 노드는 노드로 사상하고 에지는 경로로 사상한다. 대표적인 평가척도로 연장율, 밀집율 확장율이 있다. 본 논문에서는 하프버블정렬 그래프를 연장율  $1.5n-2$ , 밀집율 3, 확장율 1에 스타 그래프에 임베딩 하였다.

핵심어 : 하프 버블정렬, 스페닝 트리, 방송 알고리즘, 해밀턴 경로, 에지 중복 없는 경로

#### Abstract

In the field of interconnection networks, star graphs have been presented as an alternative to hypercube. The star graph has  $n!$  Nodes and the node address is represented by a permutation of  $n$  natural numbers. A node of the star graph can exchange with the first symbol and one of the remaining symbols. Therefore, the degree is  $n-1$ . The Bubblesort graph is a network of star graph classes with  $n!$  Nodes and nodes can exchange two neighboring symbols. Therefore, the degree is  $n-1$ . The half-bubblesort graph is a new graph that reduces the  $n-1$  degree of the bubblesort graph by half. If both graphs have the same number of nodes  $n!$ , the network cost is about half. When the graph is newly designed, it is necessary to develop various algorithms that can be realized in the designed graph. Embedding maps arbitrary graphs to different graphs. The graph consists of nodes and edges. In embedding, a node maps to a node, and an edge maps to a path. As a representative evaluation scale, there is an dilation, expansion and congestion. In this paper,

Received(June 15, 2018), Review Result(June 24, 2018), Accepted(July 13, 2018), Published(September 30, 2018)

<sup>1)</sup>(Graduate student) 57922 Dept. Computer Edu., National Univ. of sunchon, Jungang-ro 255, Sunchon, Jeonnam, Korea, email: jhseo@scnu.ac.kr

<sup>2)</sup>(Professor, Corresponding Author) 57922 Dept. Computer Edu., National Univ. of sunchon, Jungang-ro 255, Sunchon, Jeonnam, Korea. email: oklee@scnu.ac.kr

\*This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education(2017R1D1A3B03032173)

a half-bubblesort graph is embedded in the star graph at an dilation of  $1.5n-2$ , a congestion of 3, and an expansion of 1.

Keywords : half bubblesort, spanning tree, broadcasting algorithm, hamiltonian path, edge-disjoint path

## 1. 서론

4차 산업혁명을 이끌어갈 주요 기술로 인공지능, 로봇공학, 사물인터넷, 무인 운송수단, 3D 프린팅, 나노기술이 꼽힌다. 그 중 인공지능의 발전이 가장 주목 받고 있다. 인공지능은 인간 노동의 매우 많은 부분을 대체 할 것으로 예견되고 있다. 인공지능은 지능을 구현할 딥 러닝(deep learning) 알고리즘, 딥 러닝의 기반이 되는 빅 데이터(big data) 그리고 알고리즘 실행을 위한 고성능 컴퓨터 시스템 갖추어 져야 한다. 2015년 세계 최고의 고성능 컴퓨터를 제작하기 위한 행정 명령(executive order)에 미국 대통령 오바마는 서명했다. 고성능 컴퓨터를 제작하는 이유가 딥 러닝을 위한 빅 데이터 구축에 있음을 밝혔다[1]. 고성능 컴퓨터를 제작하는 한 가지 방법으로 여러 대의 컴퓨터를 연결하는 병렬 컴퓨터가 있다.

여러 대의 컴퓨터를 연결하는 위상(topology)을 상호연결망(interconnection)이라고 한다. 상호 연결망은 컴퓨터를 노드로 컴퓨터와 컴퓨터 사이의 통신 연결을 에지로 하는 그래프로 자주 표현된다. 대표적으로 토러스[2]가 있고, 토러스의 대안으로 하이퍼 큐브[3]가 발표되었고, 하이퍼 큐브의 대안으로 스타 그래프[4]가 발표 되었다. 스타 그래프의 부류로 매크로 스타 그래프[5], 매트릭스 스타 그래프[6], 버블정렬 그래프[7], 팬케익 그래프[8], 하프 팬케익 그래프[9] 등이 있고 최근에 하프 버블 정렬 그래프[10]가 발표 되었다.

그래프가 설계되면 설계된 그래프가 고성능 병렬 컴퓨터로 제작되기 위한 알고리즘 들이 개발 되어야 한다. 새로운 알고리즘의 개발에는 시간과 비용이 소요되는데, 임베딩을 통해 이미 개발된 알고리즘을 재사용 할 수 있다. 임베딩은 임의의 그래프를 다른 그래프로 사상하는 것이다. 임베딩 할 그래프  $G(V, E)$ 라고 하고 임베딩 될 그래프  $H(V, E)$ 라고 하면 임베딩 함수  $f=(\theta, \rho)$ 이다.  $\theta$ 는 노드 집합  $V(G)$ 를  $V(H)$ 에 사상하는 함수이고  $\rho$ 는  $G$ 의 에지  $(v,w)$ 를  $\theta(v)$ 와  $\theta(w)$ 를 잇는  $H$ 상의 경로에 사상하는 함수이다. 임베딩을 평가하는 척도는 확장율(expansion), 연장율(dilation) 그리고 밀집율(congestion) 등이 있다 [11].이 척도들은 1이 최적이며 1에 가까울수록 좋다.

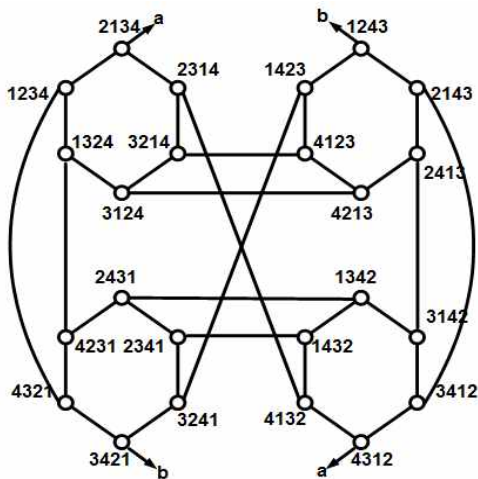
다음은 스타그래프 부류의 연결망에서 발표된 임베딩 결과이다. [12]는 하프 팬케익 그래프  $HP_n$ 를 스타 그래프  $S_n$ 에 연장율  $1.5n-2$ , 밀집율 6에 임베딩 하였고 팬케익 그래프  $P_n$ 를 스타 그래프  $S_n$ 에 연장율  $1.5n$ 에 임베딩 하였다. [13]은 토러스를  $S_n$ 에 연장율 4, 밀집율 2에 임베딩 하였

다. [14]는  $S_n$ 을  $Q_n$ 에 연장을  $\lceil \log_2(n!) \rceil - 1$ 에 임베딩 하였고 [15]는  $n$ 차원 메시를  $S_n$ 에 확장을 1, 연장을 3에 임베딩 하였다. [16]는 폴디드 하이퍼큐브  $FQ_n$ 을 폴디드 하이퍼-스타  $FHS(2n, n)$ 에 연장을 2에, 그 역은 연장을 1에 임베딩 하였다.

본 연구는 하프 버블정렬 그래프를 스타그래프에 임베딩 하는 알고리즘을 제공하고 평가 척도를 분석한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 임베딩 되는 상호연결망의 노드 정의 에지 특성에 대해 살펴본다. 3장에서는 먼저, 스타 그래프의 경로 특성을 살펴본다. 그리고 하프 버블정렬 그래프를 스타 그래프에 임베딩 하고 임베딩 알고리즘의 평가척도를 분석한다. 마지막으로 결론을 맺는다.

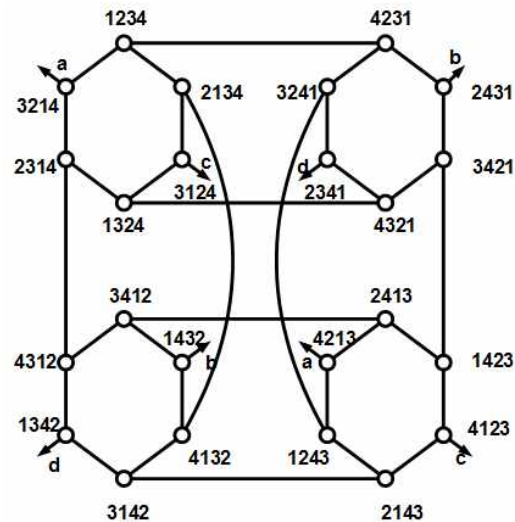
## 2. 관련연구

이 장에서는 임베딩에 사용될 상호연결망의 정의 및 특성을 하프버블정렬, 스타 그래프 순으로 살펴본다. 하프 버블정렬 그래프, 스타그래프는 노드 주소를 표현할 때 1 ~ n까지 서로 다른 자연수 n개를 모두 사용한 순열로 표현한다. 2개 그래프 모두에서, 임의의 노드  $S = s_1s_2s_3...s_i s_{i+1}...s_n$ 라고 하면 각각의 숫자를 심볼이라고 하며 첫째 심볼은  $s_1$ , 마지막 심볼은  $s_n$ ,  $i$ 번째 심볼은  $s_i$ 이다. 심볼  $s_i$ 의 위치  $i$ 를 인덱스라고 한다.



[그림 1] 4 차원 버블정렬 그래프

[Fig. 1] 4-dimension Half Bubblesort graph



[그림 2] 4차원 스타 그래프  $S_4$

[Fig. 2] 4-dimension Star Graph  $S_4$

하프버블정렬 그래프  $HB_n(n \geq 3)$ 의 에지는 크게  $B_n$ 과  $B_f$ 로 나눈다.  $B_f$ 에지는 버블정렬 그래프의 에지 개수를 약 절반으로 줄인 것이다. 하프 버블정렬 그래프의 임의의 노드

$U = u_1 u_2 u_3 \dots u_f u_{f+1} \dots u_n$ 이라 하자. 노드  $U$ 와 에지  $B_f$ 를 통해 연결된 노드  $B_f(U) = u_1 u_2 u_3 \dots u_{f+1} u_f \dots u_n$ 이다. 이때  $1 \leq f \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 이다. 따라서 임의의 노드는  $\lfloor n/2 \rfloor$ 개의  $B_f$ 와 결합(incident)되어 있다. 노드  $U$ 와 에지  $B_n$ 을 통해 연결된 노드  $B_n(U) = u_n \dots u_{f+1} u_f \dots u_3 u_2 u_1$ 이다. 따라서 하프 버블정렬 그래프  $HB_n$ 의 노드 개수는  $n!$ 개, 에지수는  $n(\lfloor n/2 \rfloor + 1)/2$ 로 구성되어 있고, 분지수는  $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 이다. 그림 1의 4차원 하프 버블정렬 그래프는 3차원 하프 버블정렬 그래프 4개로 이루어져 있다.

스타 그래프  $S_n$ 에서 임의의 노드  $S = s_1 s_2 s_3 \dots s_i \dots s_n$ 라고 하자. 펜케익 그래프와 마찬가지로 스타 그래프도 한 부류의 에지를 가지고 있다. 에지  $ES_t$ 는 노드  $s_1 s_2 \dots s_{t-1} s_t s_{t+1} \dots s_{n-1} s_n$ 와 노드  $s_t s_2 s_3 \dots s_{t-1} s_1 s_{t+1} \dots s_{n-1} s_n$ 를 연결한다( $2 \leq t \leq n$ ). 노드  $S$ 와 에지  $ES_t$ 에 의해 인접한 노드를  $ES_t(S)$ 로 표현한다. 스타 그래프  $S_n$ 은 분지수  $n-1$ 이고  $n!$ 개의 노드와  $n!((n-1)/2)$ 개의 에지로 구성되어 있다. 그림 2는 4차원 스타이다.

### 3. 임베딩 알고리즘

그래프는 노드집합과 에지집합으로 이루어져 있어 그래프  $G = (V, E)$ 로 정의한다. 노드집합을  $V(G)$ , 에지집합을  $E(G)$ 로 표기한다. 두 그래프 사이의 임베딩은 노드 사상과 에지 사상으로 완성된다. 그래프  $G$ 를 그래프  $H$ 에 사상할 때, 노드 사상은  $V(G)$ 를  $H(G)$ 에 사상하고, 에지 사상은  $E(G)$ 를  $H$ 의 경로에 사상한다. 이 장에서는 하프버블정렬 그래프를 스타그래프에 사상하고 사상 알고리즘의 평가 척도를 분석한다. 이를 위해 먼저 스타 그래프의 경로 특성을 정리한다.

#### 3.1 스타 그래프의 경로 특성

스타 그래프의 경로 특성을 알아보자. 경로는 임의의 두 노드를 연결하는 노드와 에지가 교차로 나타나는 순서열이다. 단 에지는 생략 할 수 있으며 같은 노드는 두 번 나타나지 않는다. 시작노드를  $S = s_1 s_2 s_3 \dots s_i s_{i+1} \dots s_n$ 라고 하고 도착노드를  $V = v_1 v_2 v_3 \dots v_i v_{i+1} \dots v_n$ 라고 하자. 경로에서 에지는  $\rightarrow$ 로 표시한다. 두 노드 사이의 경로는 노드  $S$ 의 심볼을 노드  $V$ 의 심볼과 같게 만드는 과정과 같다. 그 과정을 아래에 설명한다.

스타 그래프의 노드는 인덱스 1 자리의 심볼과 임의의 심볼을 서로 교환하는 에지(연산)가 있다. 스타 그래프는  $S$ 의 심볼들은 모두 서로 다르며  $V$ 의 심볼도 모두 서로 다르다. 또한  $S$ 의 심볼과 같은 심볼은  $V$ 에 단 하나만 있다. 따라서  $S$ 의 심볼과 같은 값을 갖는  $V$ 의 심볼 자리에  $S$ 의 모든 심볼을 옮기는 과정이 경로가 된다. 자리를 옮기기 위한 연산(에지)은  $ES_i$ 이다. 자리를 옮기기 위

한 심볼은 인덱스 1로 먼저 이동해야 한다. 이동해야 하는 심볼의 순서는 상관없다.  $s_1 = v_2, s_2 = v_3, s_3 = v_4, \dots, s_i = v_{i+1}, s_{i+1} = v_{i+2} \dots s_{n-1} = v_n, s_n = v_1$  라고 한다. 노드  $S$ 를  $V$ 의 심볼을 이용하여 다시 표현하면  $S = v_2v_3v_4 \dots v_{i+1}v_{i+2} \dots v_1$ 이다. 두 노드 사이의 경로는 다음과 같다.

$$S = v_2v_3v_4 \dots v_{i+1}v_{i+2} \dots v_nv_1 \rightarrow v_3v_2v_4 \dots v_{i+1}v_{i+2} \dots v_nv_1 \rightarrow v_4v_2v_3 \dots v_{i+1}v_{i+2} \dots v_nv_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+1}v_2v_3v_4 \dots v_{i+2} \dots v_nv_1 \rightarrow v_{i+2}v_2v_3v_4 \dots v_{i+1} \dots v_nv_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_nv_2v_3v_4 \dots v_{i+1}v_{i+2} \dots v_1 \rightarrow v_1v_2v_3v_4 \dots v_{i+1}v_{i+2} \dots v_n$$

**보조 정리 1.** 스타 그래프에서 연속된 두 개의 심볼이 서로 뒤 바뀐 두 노드 사이에는 길이 3의 경로가 있다. 단  $s_1$ 과  $s_2$ 가 바뀐 두 노드의 경우는 에지  $ES_1$ 의 양쪽에 결합(incident)되어 있어 서로 인접(adjacent)한다. 이 증명은 생략한다.

**증명** 임의의 노드  $S = s_1s_2s_3 \dots s_{i-1}s_i s_{i+1} \dots s_n$ 라고 하고 연속된 두 개의 심볼이 서로 뒤 바뀐 노드  $V = s_1s_2s_3 \dots s_{i-1}s_{i+1}s_i \dots s_n$ 이라고 한다. 두 노드 사이의 경로는 다음과 같다.

$$S = s_1s_2s_3 \dots s_{i-1}s_i s_{i+1} \dots s_n \rightarrow s_i s_2s_3 \dots s_{i-1}s_1s_{i+1} \dots s_n \rightarrow s_{i+1}s_2s_3 \dots s_{i-1}s_1s_i \dots s_n \rightarrow s_1s_2s_3 \dots s_{i-1}s_{i+1}s_i \dots s_n$$

### 3.2 하프 버블정렬 그래프를 스타 그래프 임베딩

하프버블정렬 그래프의 노드는 노드 주소가 같은 스타 그래프의 노드로 사상된다. 두 그래프 모두 노드 개수는  $n!$ 이고 노드 주소는 1 ~  $n$ 사이의 자연수 순열을 갖기 때문에 가능하다. 하프버블정렬 그래프  $HB_n$ 의 에지는  $B_n$ 과  $B_f$ 가 있다. 에지 별로 나누어 살펴본다. 임의의 노드  $U = u_1u_2u_3 \dots u_{f-1}u_f u_{f+1} \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n$ 이라 하자.

에지  $B_n$ 의 사상

노드  $U$ 와 에지  $B_n$ 으로 연결된 노드는  $V = u_n u_{n-1}u_{n-2} \dots u_{f+1}u_f u_{f-1} \dots u_3u_2u_1$ 이다. 하프버블정렬 그래프의 노드  $U$ 와  $V$ 는 같은 주소를 갖는 스타 그래프에 사상되었다. 따라서 에지  $B_n$ 은 스타 그래프의 노드  $U$ 에서  $V$ 까지 경로에 사상된다. 스타 그래프에서 노드  $U$ 와  $V$ 의 경로는 다음과 같다.

$$U = u_1u_2u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n \rightarrow u_n u_2u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_{n-1}u_1 \rightarrow u_2u_n u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_{n-1}u_1 \rightarrow u_{n-1}u_n u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_2u_1 \rightarrow u_n u_{n-1}u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_2u_1 \rightarrow u_3u_{n-1}u_n \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_2u_1 \rightarrow u_{n-2}u_{n-1}u_n \dots u_{f-1}u_f \dots u_3u_2u_1 \rightarrow u_n u_{n-1}u_{n-2} \dots u_{f-1}u_f \dots u_3u_2u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{f-1}u_{n-1}u_{n-2} \dots u_n u_f \dots u_3u_2u_1 \rightarrow u_f u_{n-1}u_{n-2} \dots u_n u_{f-1} \dots u_3u_2u_1 \rightarrow u_n u_{n-1}u_{n-2} \dots u_f u_{f-1} \dots u_3u_2u_1$$

에지  $B_f$ 의 사상

$1 \leq f \leq \lfloor n/2 \rfloor$  이므로  $f$ 의 값에 따라 살펴본다.

먼저  $f$ 가 1일 경우 노드  $U$ 와 에지  $B_f$ 로 연결된 노드는  $V = u_2u_1u_3 \dots u_{f-1}u_f u_{f+1} \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n$ 이다. 스타 그래프에서 노드  $U$ 와  $V$ 는 에지  $ES_2$ 로 연결되어 있다.

$$U = u_1u_2u_3 \dots u_{f-1}u_f u_{f+1} \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n \rightarrow u_2u_1u_3 \dots u_{f-1}u_f u_{f+1} \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n$$

$2 \leq f \leq \lfloor n/2 \rfloor$  일 경우  $U$ 와 에지  $B_f$ 로 연결된 노드는  $V = u_1u_2u_3 \dots u_{f-1}u_{f+1}u_f \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n$ 이다. 스타 그래프에서 노드  $U$ 와  $V$ 사이의 경로는 다음과 같다.

$$U = u_1u_2u_3 \dots u_{f-1}u_f u_{f+1} \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n \rightarrow u_f u_2 u_3 \dots u_{f-1} u_1 u_{f+1} \dots u_{n-2} u_{n-1} u_n \rightarrow u_{f+1} u_2 u_3 \dots u_{f-1} u_1 u_f \dots u_{n-2} u_{n-1} u_n \rightarrow u_1 u_2 u_3 \dots u_{f-1} u_{f+1} u_f \dots u_{n-2} u_{n-1} u_n$$

**정리 2.** 하프버블정렬 그래프  $HB_n$ 은 스타 그래프  $S_n$ 에 연장을  $1.5n-2$ 에 밀집을 3, 확장을 1에 일대일 임베딩 가능하다.

**증명**  $HB_n$ 과  $S_n$ 의 노드수는  $n!$ 로 같고 임베딩에 모든 노드가 참여하므로 확장을  $\frac{|V(P_n)|}{|V(S_n)|} = 1$ 이다. 여기에서  $|V(G)|$ 는 그래프  $G$ 의 노드 집합  $V(G)$ 의 원소 개수이다.  $HB_n$ 의 하나의 노드는 정확히 같은 주소를 갖는  $S_n$ 의 하나의 노드로 사상되므로 일대일 임베딩이다. 연장은  $HB_n$ 의 에지가  $S_n$ 의 경로에 사상되었을 때 사상된 경로의 길이 중 가장 긴 값이다. 에지  $B_f$ 가 사상된  $S_n$ 의 경로 길이는 보조정리 1에 따라 3이다. 에지  $B_n$ 은  $S_n$ 의 경로에 사상된다. 사상된  $S_n$ 의 경로를 살펴보면 다음과 같다.  $U = u_1u_2u_3 \dots u_{f-1}u_f u_{f+1} \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n$ 라고하면 노드  $U$ 와 에지  $B_n$ 으로 연결된 노드는  $V = u_nu_{n-1}u_{n-2} \dots u_{f+1}u_f u_{f-1} \dots u_3u_2u_1$ 이다. 에지  $B_n$ 은 스타 그래프의 노드  $U$ 에서  $V$ 까지 경로에 사상된다. 스타 그래프에서 노드  $U$ 와  $V$ 의 경로는 다음과 같다.

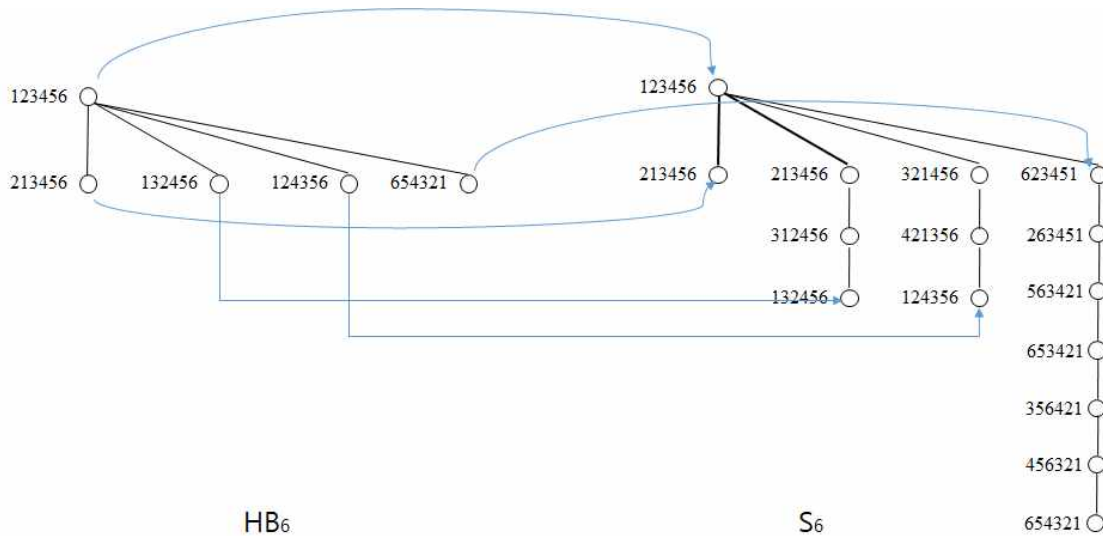
$$U = u_1u_2u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_{n-1}u_n \rightarrow u_nu_2u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_{n-1}u_1 \rightarrow u_2u_nu_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_{n-1}u_1 \rightarrow u_{n-1}u_nu_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_2u_1 \rightarrow u_nu_{n-1}u_3 \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_2u_1 \rightarrow u_3u_{n-1}u_n \dots u_{f-1}u_f \dots u_{n-2}u_2u_1 \rightarrow u_{n-2}u_{n-1}u_n \dots u_{f-1}u_f \dots u_3u_2u_1 \rightarrow u_nu_{n-1}u_{n-2} \dots u_{f-1}u_f \dots u_3u_2u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{f-1}u_{n-1}u_{n-2} \dots u_nu_f \dots u_3u_2u_1 \rightarrow u_f u_{n-1} u_{n-2} \dots u_n u_{f-1} \dots u_3 u_2 u_1 \rightarrow u_n u_{n-1} u_{n-2} \dots u_f u_{f-1} \dots u_3 u_2 u_1$$

예를 들어,  $S_6$ 에서  $u=123456$ 이고  $v=654321$ 인 경우이다. 경로를 살펴보면

$u=123456 \rightarrow 623451 \rightarrow 263451 \rightarrow 563421 \rightarrow 653421 \rightarrow 356421 \rightarrow 456321 \rightarrow 654321$ 이다. 심볼 2와 5를 살펴보면 2번째 노드에서는 모두 제 위치가 아니지만 5번째 노드에서 모두 제 위치를 찾아간다. 심볼 3

과 4도 마찬가지로 경로길이 3에 제 자리를 찾아간다. 마지막 심볼 6은 심볼 1 ~ 5가 제자리를 찾아가면 경로 길이 0에 제자리에 위치하게 된다. 심볼 1은 맨 처음 경로 길이 1에 자기 자리로 찾아가간다. 따라서 경로길이는  $(n-2) \times 3/2 + 1 = 1.5n-2$ 이다. 따라서 연장율은  $1.5n-2$ 이다.

밀집율을 살펴보기 전에 먼저  $HB_6$ 이  $S_6$ 에 어떻게 사상되는지 그림 3을 살펴보자.  $HB_6$ 의 노드 123456은  $S_6$ 의 노드 123456에 사상된다.  $HB_6$ 의 노드 123456은 에지  $B_1$ 에 의해 노드 213456과 인접하고 에지  $B_2$ 에 의해 노드 132456과 인접하고 에지  $B_3$ 에 의해 노드 124356과 인접하고 에지  $B_6$ 에 의해 노드 654321에 인접한다. 그림 3에 노드 123456과 결합된 4개의 에지가  $S_6$ 의 경로에 어떻게 사상되는지 보였다. 파란색 실선은 노드 사상을 표시한다.  $HB_6$ 의 에지 (123456, 654321)은  $S_6$ 의 경로 123456→623451→263451→563421→653421→356421→456321→654321으로 연장율 7이다.  $S_6$ 의 경로들에서 굵은 실선으로 표시된 에지 (123456, 213456)는 같은 에지로 밀집율이 2이다. 이 외의 에지들은 밀집율이 1이다.



[그림 3]  $HB_6$ 을  $S_6$ 에 임베딩  
 [Fig. 3] Embedding  $HB_6$  into  $S_6$

여기에서  $HB_6$  노드 213456을 추가로 살펴보면 인접한 노드는 123456, 231456, 214356, 654321이다. 에지 (213456, 123456)은  $S_6$ 의 에지 (213456, 123456)에 사상되므로 살펴볼 필요 없다. 에지 (213456, 231456)은 경로 213456→123456→321456→231456에 사상된다. 에지 (213456, 214356)은 경로 213456→312456→421356→214356에 사상된다. 에지 (213456, 654321)은 경로 213456→613452→163452→563412→365412→465312→564312→654312에 사상된다. 굵은 글씨로 표시된 에지 (213456, 123456)는 총 3번 사용되었으므로 밀집율은 3이다.

**보조 정리 2.** 하프버블정렬 그래프  $HB_n$ 은 스타그래프  $S_n$ 에 평균 연장율  $\approx 6$ 에 임베딩 가능하다.

**증명**  $HB_n$ 에서 임의의 노드는 1개의  $B_n$  에지와  $\lfloor n/2 \rfloor$  개의  $B_f$  에지와 결합되어 있다. 에지  $B_1$ 은 경로길이 1에 사상되고  $B_2 \sim B_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 는 보조정리 1에 따라 경로길이 3에 사상된다.  $B_n$ 은 정리 2에 따라 경로길이  $1.5n-2$ 에 사상된다.  $n$ 이 짝수일 경우 평균 연장율은 모든 에지의 연장율의 합 / 총 에지의 수 =  $\frac{1+3(n/2-1)+(1.5n-2)}{(n/2+1)} \approx 6$ 이다.  $n$ 이 홀수일 경우 평균 연장율은 모든 에지의 연장율의 합 / 총 에지의 수 =  $\frac{1+3(n/2-2)+(1.5n-2)}{(n/2)} \approx 6$ 이다.

#### 4. 결론

버블정렬 그래프는 노드 주소를 이루는 심볼을 교환하여 이웃한 노드 주소를 얻는 스타 그래프 부류의 한 종류이다. 하프 버블정렬 그래프는 버블정렬 그래프의 분지수를 절반으로 줄였지만 지름은 크게 늘어나지 않아 망 비용이 버블정렬 그래프의 약 절반으로 우수한 그래프이다. 최근에 설계된 이 연결망은 아직 개발해야 할 많은 알고리즘이 있다. 이런 연결망들은 임베딩을 통해 기존에 개발된 알고리즘이 재사용될 수 있다. 이 논문은 하프 버블정렬 그래프를 스타 그래프에 연장율  $1.5n-2$ , 밀집율 3, 확장율 1에 임베딩 하였다. 이 임베딩에서 사용된 부하 계수는 1로 일대일 임베딩이다. 일대일 임베딩은 하프 버블정렬 그래프의 하나의 노드가 스타 그래프의 하나의 노드로 사상되었다는 말로 하나의 노드에서 수행중인 프로세스가 추가 부하 없이 그대로 실행될 수 있음을 의미한다. 또한 확장율 1로 하프 버블 정렬 그래프의 모든 노드가 손실 없이 스타 그래프로 임베딩 되었음을 의미한다. 따라서 임베딩 알고리즘은 매우 효과적이다.

#### References

- [1] Seo, J. H., Kim, J. S., Chang, H. J., & Lee, H. O., The hierarchical Petersen network: a new interconnection network with fixed degree, *The Journal of Supercomputing*, (2018), Vol. 74, No. 4, pp. 1636-1654.
- [2] R. M. Shadab, M. I. MdAhidulIshlam, F. M. Farabi, J. U. Ahmed, Universal Stage Switching Algorithm for Hypercube Interconnection Network in Multi-Core System, *Journal of Electrical and Electronics Engineering*. (2016), Vol. 2, No. 1, pp. 68-71
- [3] P. Sivagami, T-coloring of Three-dimensional Toroidal Network, (2017). Vol. 109, No. 9, pp. 72-80
- [4] González-Durruthy, M., Monserrat, J. M., Rasulev, B., Casañola-Martín, G. M., Barreiro Sorrivias, J. M., Paraíso-Medina, S. Munteanu, C. R., Carbon Nanotubes' Effect on Mitochondrial Oxygen Flux Dynamics: Polarography Experimental Study and Machine Learning Models using Star Graph Trace Invariants of Raman Spectra, *Nanomaterials*, (2017), Vol. 7, No. 11, pp. 386.
- [5] Yeh, Chi-Hsiang, and Emmanouel A. Varvarigos., Macro-star networks: efficient low-degree alternatives to



- star graphs, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **(1998)**, Vol. 9, No. 10, pp987-1003.
- [6] Lee, H. O., Kim, J. S., Park, K. W., Seo, J., Oh, E., Matrix-Star graphs: a new interconnection network based on matrix operations, *LNCS*, **(2005)**, Vol. 3740, pp. 478-487.
- [7] Tanaka, Yuuki, On the Stack Number and the Queue Number of the Bubble-Sort Graph, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **(2016)**, Vol. 99, No. 6, pp. 1012-1018.
- [8] Konstantinova, Elena, and Alexey Medvedev, Independent even cycles in the Pancake graph and greedy Prefix-reversal Gray codes, *Graphs and Combinatorics*, **(2016)**, Vol. 32, No. 5, pp.1 965-1978.
- [9] Kim, JuBong, Jung-Hyun Seo, and HyeongOk Lee, A Half Pancake network that improve the network cost for Pancake graph, *Journal of Korea Multimedia Society*, **(2014)**, Vol. 17, No. 6, pp. 716-724.
- [10] Jung-Hyun Seo, sim hyun, HyeongOk Lee, Design and feature analysis of a new interconnection network : Half Bubblesort Graph, *Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering*, **(2017)**, Vol. 21, No. 7, pp. 1327-1334.
- [11] X. Shen and W. Liang and Q. Hu, On Embedding Between 2D Meshes of the Same Size, *IEEE trans. comput.*, **(1997)**, Vol. 46, No. 8, pp. 880-889.
- [12] Seo, Jung-hyun, and HyeongOk Lee, Embedding Algorithm among Half Pancake, Pancake, and Star Graphs, *International Journal of Software Engineering and Its Applications*, **(2016)**, Vol. 10, No. 3, pp. 191-204.
- [13] Saikia, Dilip K., R. Badrinath, and Ranjan K. Sen, Embedding torus on the star graph, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **(1998)**, Vol. 9, No.7, pp. 650-663
- [14] Bettayeb, Saïd, Bin Cong, and Mike Girou, Embedding star networks into hypercubes, *IEEE Transactions on Computers*, **(1996)**, Vol. 45, No. 2, pp. 186-194
- [15] Ranka, Sanjay, Jhychun Wang, Nangkang Yeh, Embedding meshes on the star graph, *Proceedings of the 1990 ACM/IEEE conference on Supercomputing*. IEEE Computer Society Press, **(1990)**, November, 12-16, New York, USA, pp. 476-485.
- [16] Kim, Jong-Seok, Chung-Ho Cho, and Hyeong-Ok Lee, Analysis of Topological Properties and Embedding for Folded Hyper-Star Network, *Journal of Korea Multimedia Society*, **(2008.)**, Vol. 11, No. 9, pp. 1227-1237.